

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 11.06.2025

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in B, V_B .

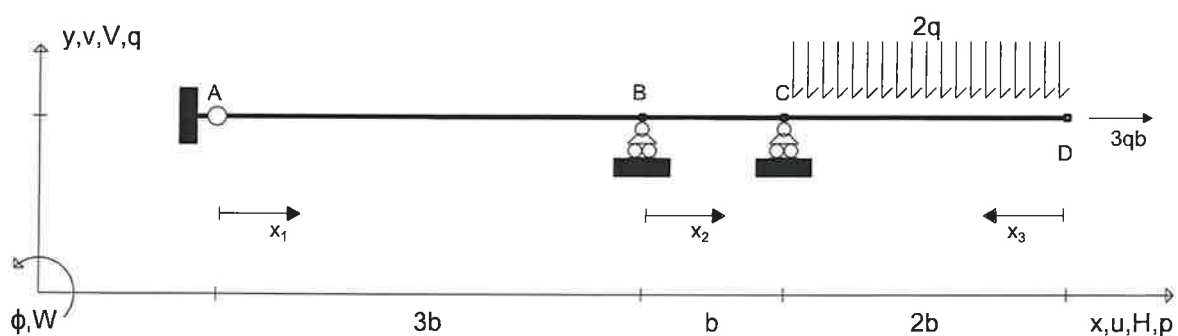
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, ϕ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 11.06.25*001



EQUAZIONE DI QUANTITÀ: $V_B(X, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

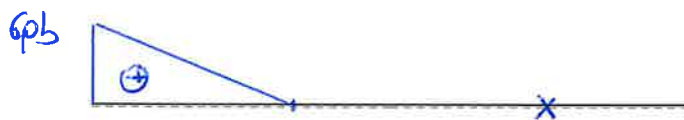
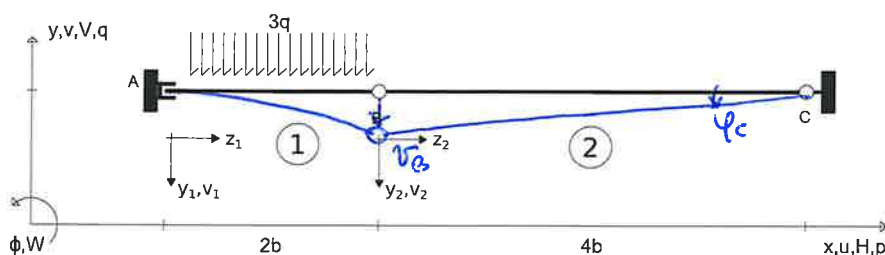
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

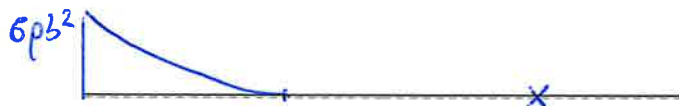
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*, v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA_2 11.06.25*001



$\uparrow (+) \downarrow$



$\circ (+) \circ$

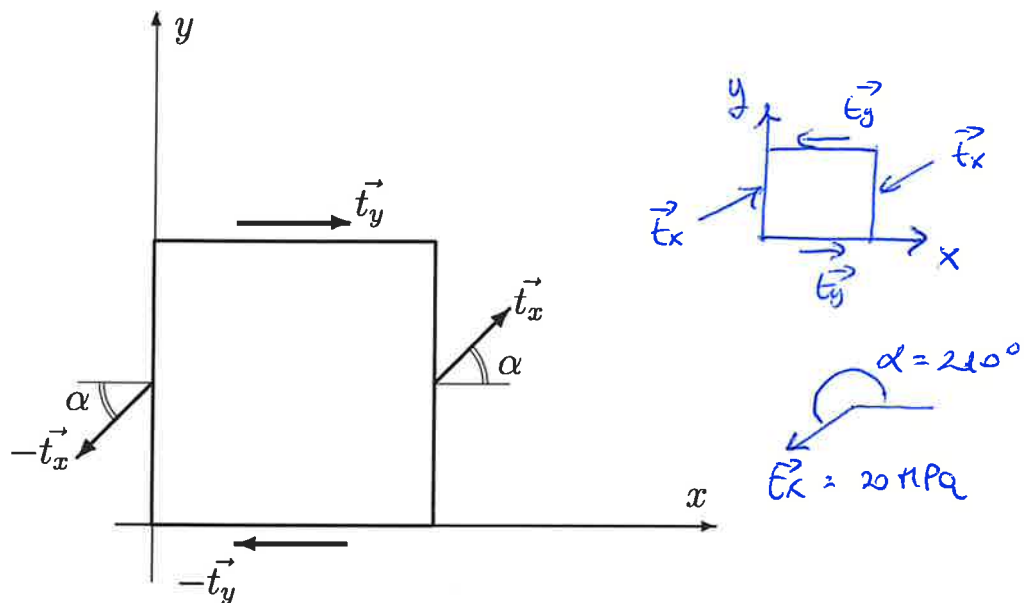
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 6qb; & M_A (\circlearrowleft) &= 6qb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 6qb - 3qz_1; & M_{AB} &= -6qb^2 + 6qbz_1 - \frac{3}{2}qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=4b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (3qb^2z_1^2 - qb^2z_1^3 + \frac{1}{8}qz_1^4); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (6qb^2z_1 - 3qb^2z_1^2 + \frac{1}{2}qz_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (6qb^4 - \frac{3}{2}qb^3z_2); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-\frac{3}{2}qb^3); \\
 v_B &= \frac{6qb^4}{EI} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{3qb^3}{2EI} (\searrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 210^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 20$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

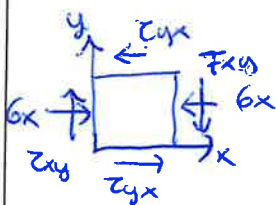
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -17,320 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -10,000 \text{ (MPa)};$$

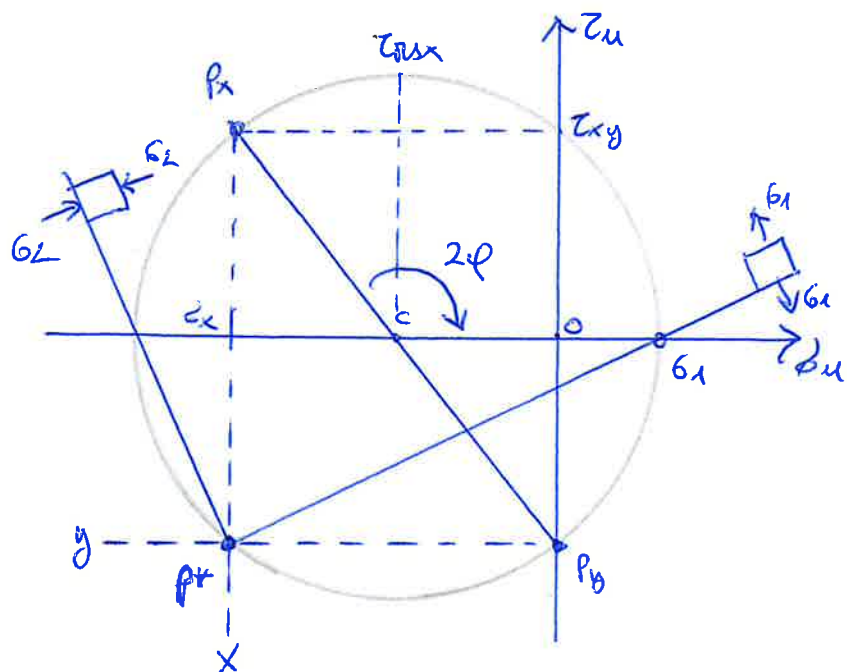
$$\sigma_1 = 4,568 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -21,889 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 13,228 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

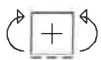
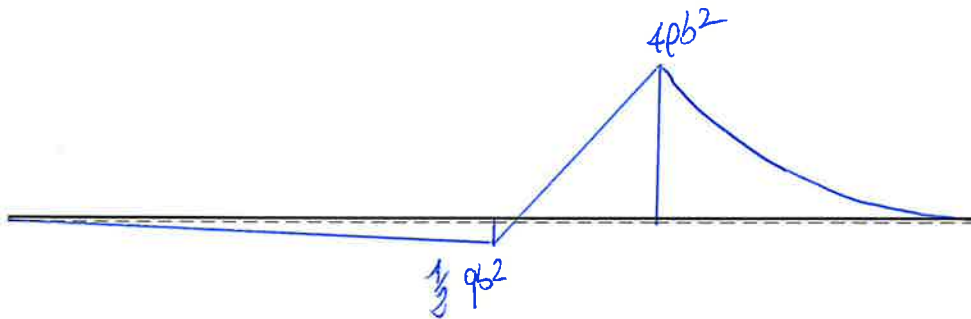
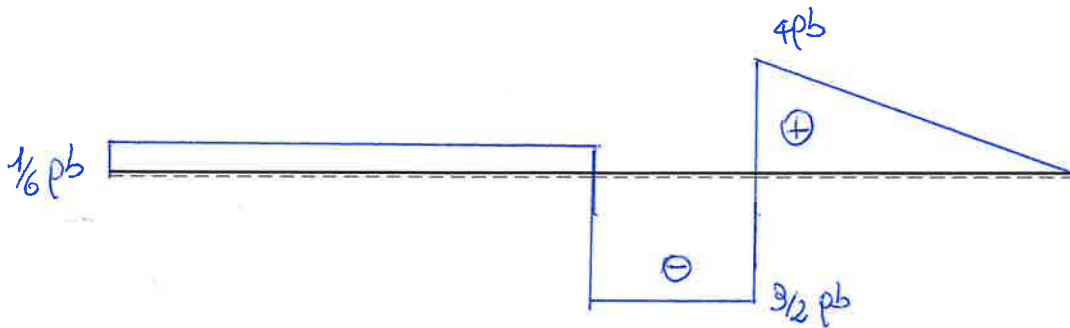
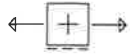
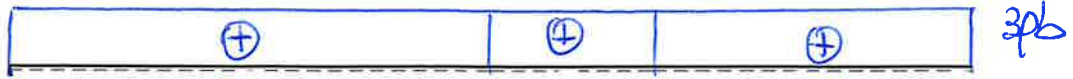


$$P_x = (-17,320; 10,000)$$

$$P_y = (0,000; -10,000)$$



$$\varphi = -65,44 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= -3qb; & V_A(\uparrow) &= 1/6 qb; & V_B(\uparrow) &= -14/3 qb; & V_C(\uparrow) &= 12/2 qb; \\
 N_{AB} &= 3pb; & T_{AB} &= 1/6 pb; & M_{AB} &= 1/6 pb \times 1; \\
 N_{BC} &= 3pb; & T_{BC} &= -3/2 pb; & M_{BC} &= 1/2 pb^2 - 3/2 pb \times 2; \\
 N_{DC} &= 3pb; & T_{DC} &= 2p \times 3; & M_{DC} &= -9 \times 3^2; \\
 \varphi_A &= -qb^3/4ED \quad (2)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 11.06.2025

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, la reazione dell'appoggio in B, V_B .

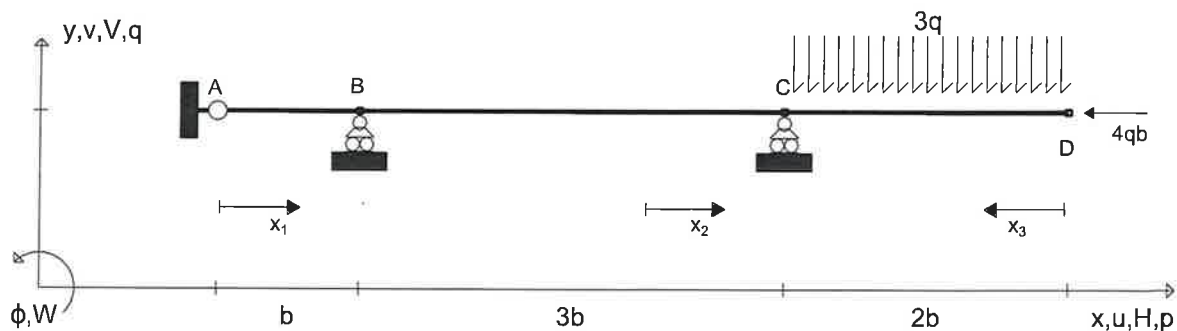
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A, ϕ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 11.06.25*002



EQUAZIONE DI CONSISTENZA : $V_B(x, q) = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

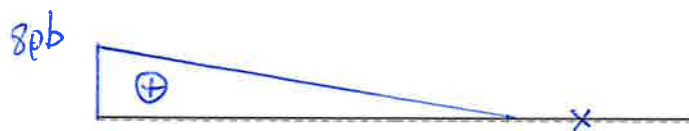
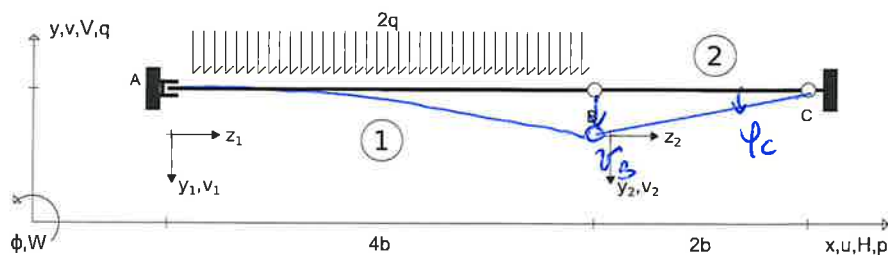
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

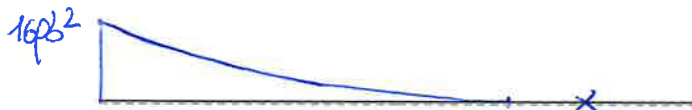
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B , v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA_2 11.06.25*002



$\uparrow (+) \downarrow$



$\curvearrowright (+) \curvearrowleft$

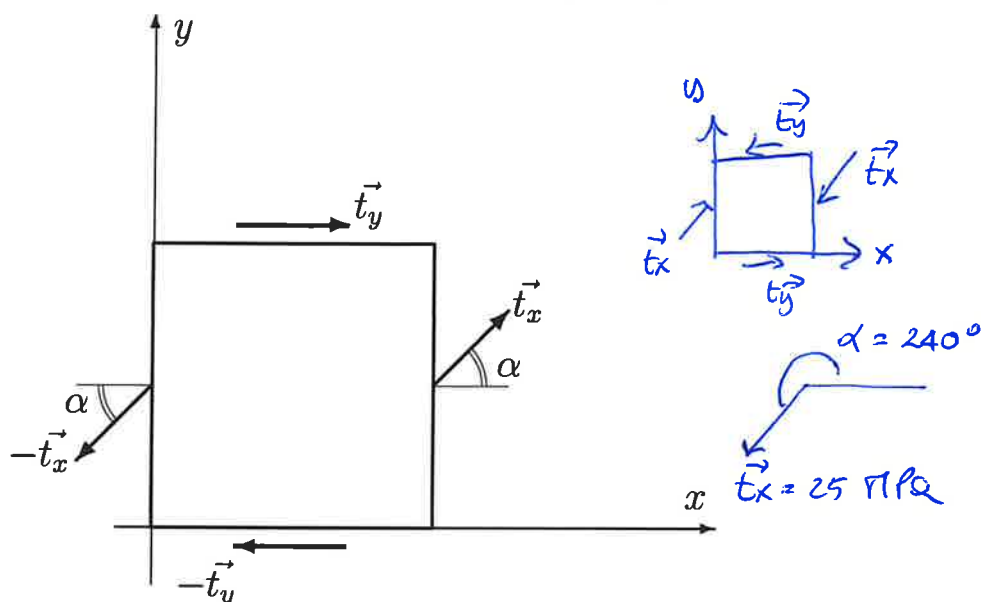
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 8pb; & M_A (\curvearrowright) &= 16pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 8pb - 2qt_1; & M_{AB} &= -16pb^2 + 8pb t_1 - qt_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(t_1=0)=0; & v_1'(t_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1(t_1=4b)=v_2(t_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(t_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (8pb^2 z_1^2 - 4/3 qb z_1^3 + 1/12 q z_1^4); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (16pb^2 z_1 - 4pb z_1^2 + 1/3 q z_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (64pb^4 - 32qb^3 z_2); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-32pb^3); \\
 v_B &= \frac{64pb^4}{EI} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{32pb^3}{EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 25$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

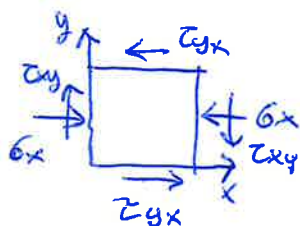
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -12,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -21,650 \text{ (MPa)};$$

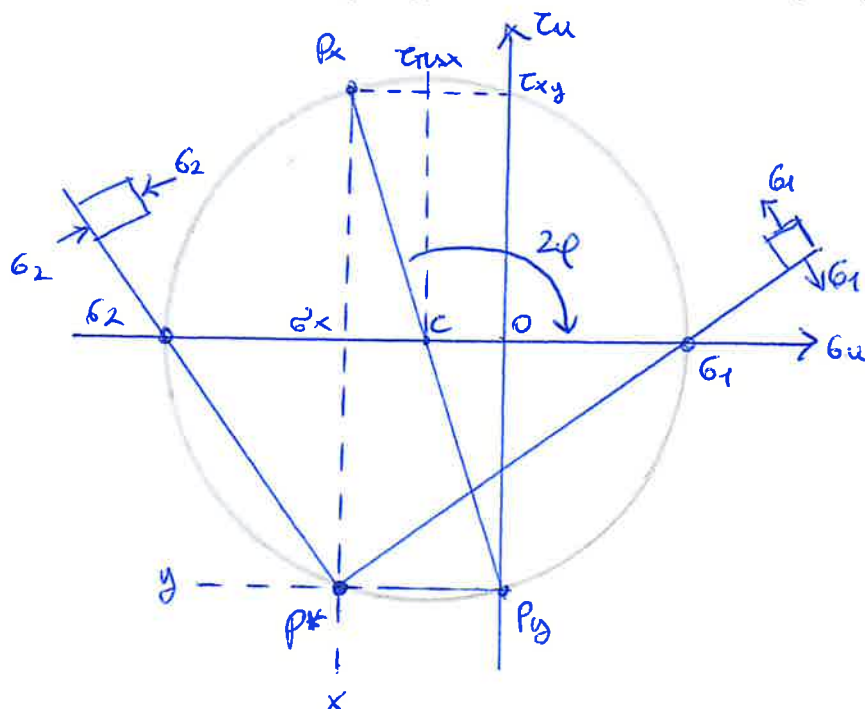
$$\sigma_1 = 16,284 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -28,784 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 22,534 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

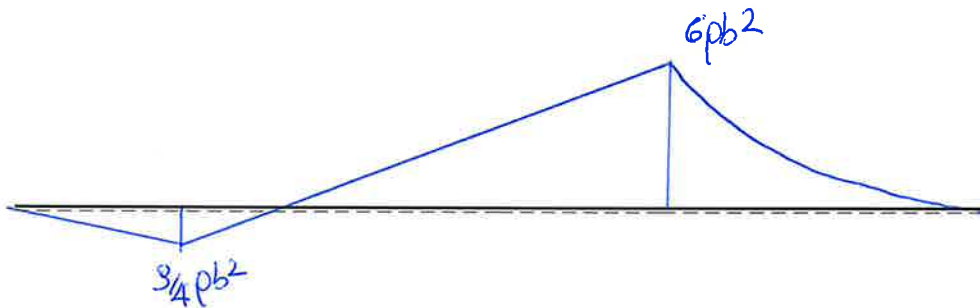
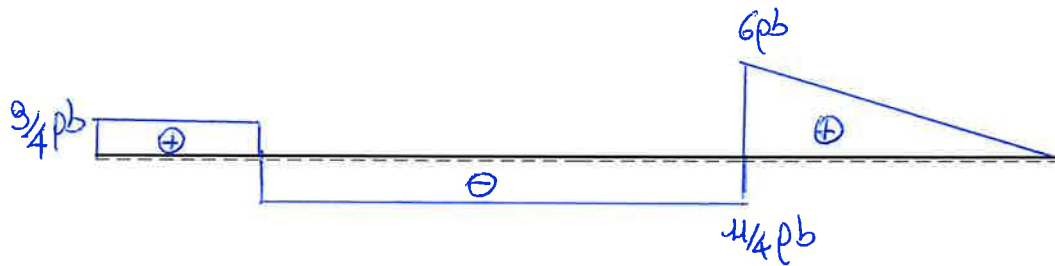
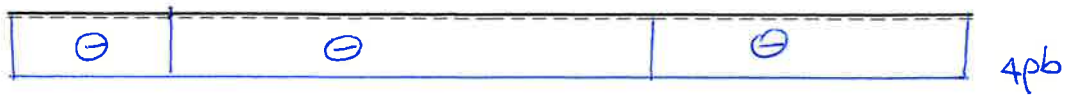


$$P_x = (-12,500; 21,650)$$

$$P_y = (0,000; -21,650)$$



$$\varphi = -53,105 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 H_A(\Rightarrow) &= 4pb; & V_A(\uparrow) &= \frac{3}{4}pb; & V_B(\uparrow) &= -5qb; & V_C(\uparrow) &= \frac{35}{4}qb; \\
 N_{AB} &= -4pb; & T_{AB} &= \frac{3}{4}pb; & M_{AB} &= \frac{3}{4}pbx_1; \\
 N_{BC} &= -4pb; & T_{BC} &= -\frac{11}{4}qb; & M_{BC} &= \frac{3}{4}pb^2 - \frac{11}{4}qb x_2; \\
 N_{DC} &= -4pb; & T_{DC} &= 3q \times 3; & M_{DC} &= -\frac{3}{2}qx_3^2; \\
 \varphi_A &= -\frac{3qb^3}{8EI} \quad (2)
 \end{aligned}$$